

EL POSTULADO DE EUCLIDES

¿Cuántas de las rectas que pasan por un punto no cortan a otra dada? Según el postulado de Euclides, sólo una: la perpendicular levantada, por el punto, á la perpendicular que del mismo punto podemos bajar á la recta que nos dieron. Fué llamada *paralela*, y una vez entendida por paralela la recta que no corta á otra, se dijo que por un punto no se podía trazar más que una paralela á una recta, que es otra manera de enunciar el postulado de Euclides.

En cuanto á demostrar este postulado por medio de resultados geométricos que no se funden en él, cosa es que no se ha logrado nunca. Hacia el año 30, Lobattcheffsky y Bolyai cambiaron de sistema, y supusieron el postulado falso, intentando construir la geometría pura con todo rigor.

Esta nueva geometría que comprende la de Euclides, como caso particular, recibió los nombres de *astral*, *imaginaria*, *pangeometría*, y por último, *geometría no euclidiana*, que ha conservado.

La idea de Lobattcheffsky se le ocurrió años antes á Gauss, que llegó á los mismos resultados que él, sin publicarlos Después de Lobattcheffsky y Bolyai se han ocupado del asunto muchos géómetras, sobre todo Riemann, Klein y Beltrami.

Quiero establecer geoméricamente los fundamentos de la geometría no euclidiana, y haré ver la causa de la imposibilidad de demostrar el postulado de Euclides.

*
* *

Bajemos desde el punto dado una perpendicular, h , á la recta dada, y supongamos que una recta móvil, que continuamente pasa por el punto, se separa de la perpendicular hacia la derecha, por ejemplo. Cuando forme con h un ángulo de 90° , tendremos la paralela de Euclides, y esta recta no cortará á la otra. Pero no sabemos si existen otras posiciones de la recta móvil que tampoco la corten. De todos modos, infinidad de posiciones sí la cortan; luego habrá un momento en que la recta móvil, al separarse de la perpendicular h , *dejará de cortar* á la recta dada.

Esta posición, que formará con h un ángulo desconocido, se llama *paralela* en geometría no euclidiana. Es claro que del otro lado de la perpendicular h , y formando el mismo ángulo, habrá otra *paralela*. En resumen, por un punto se pueden trazar dos paralelas á una recta, y cuando el ángulo desconocido que forman con h sea 90° , las dos se confunden con la de Euclides. La geometría corriente es, pues, un caso particular de la no euclidiana.

Para seguir adelante es esencial escoger las proposiciones geoméricas en que nos apoyemos, puesto que no deben fundarse en el postulado de Euclides. Debo citar la de que una recta que corta el perímetro de un triángulo lo vuelve á cortar; por medio de ella es fácil establecer que una *paralela* lo es en todos sus puntos, y que si una recta es *paralela* a otra, esta lo es á la primera.

La teoría de las paralelas está íntimamente relacionada con la de los triángulos. En la geometría euclidiana se deduce del Postulado que la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos. Del mismo modo, en la no euclidiana, habrá teoremas relativos á los triángulos en relación con la nueva definición de paralelas. No olvidemos que, gracias a su origen,

los teoremas no euclidianos son absolutamente ciertos, cosa no sucede con los euclidianos.

Teorema 1.º «La suma de los ángulos de un triángulo no puede pasar de dos rectos.» En efecto, podemos en todo triángulo prolongar en una cantidad igual á sí misma la mediana correspondiente al menor ángulo. Uniendo el extremo con otro vértice del triángulo resulta un nuevo triángulo en el cual la suma de los ángulos es la de los del primitivo y los dos menores equivalentes al menor del primitivo. Claro está que haciendo la misma operación con el triángulo nuevo y continuando el suficiente número de veces llegaremos á un triángulo en el que dos de los ángulos pueden hacerse tan pequeños como queramos.

Pues bien, si la suma S de los ángulos del primitivo fuera mayor de dos rectos, como esa suma es la misma para los triángulos que vamos obteniendo, al llegar al último, en que conseguimos que dos ángulos den una suma menor de lo que S excede de dos rectos, el tercer ángulo valdría más de dos rectos, lo que es imposible.

2.º «Si la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos, *todos* los triángulos gozan de la misma propiedad.» Por de pronto, los dos triángulos rectángulos en que se puede descomponer el triángulo.

En efecto, la suma de todos los ángulos de los dos triángulos componentes debe ser cuatro rectos, puesto que quitando los dos rectos de la base, debe dar la de los del descompuesto.

Ahora que tenemos un triángulo rectángulo en el cual vale la suma de los ángulos dos rectos, podemos construir uno con ambas propiedades, y tan grande como se quiera, doblando el primero sobre el plano, de modo que resulte un rectángulo, y repitiendo el rectángulo cuantas veces necesitemos hasta formar uno que puede ser todo lo grande que se desee; tirando la diagonal del rectángulo total tenemos el triángulo pedido.

Para hacer ahora ver que la suma de los ángulos de todo triángulo vale dos rectos bastará descomponerlo en dos triángulos rectángulos, encerrar cada uno dentro del suficiente-

mente grande que acabamos de construir, haciendo coincidir los catetos de continente y contenido.

Los ángulos de cada triángulo rectángulo contenido deben valer dos rectos como los del continente, puesto que en el triángulo que tiene un cateto del contenido y otro del continente hay la misma suma de ángulos que en uno y en otro

Valiendo los ángulos de cada componente dos rectos, el total, ó sea el triángulo cualquiera que nos dieran, goza de esta propiedad.

3.º «Por último, si las dos paralelas no euclidianas se reducen á la de Euclides, la suma de los ángulos de todo triángulo vale dos rectos.» En efecto, se puede construir un triángulo rectángulo dentro de la faja de las paralelas de Euclides, perpendiculares á un cateto, de modo que la suma de sus ángulos esté tan próxima de dos rectos como queramos, para lo cual aproximaremos la hipotenusa á una de las paralelas que forman la faja. Todo triángulo rectángulo interior á éste tendrá la misma suma de ángulos; luego no puede ser ésta otra que dos rectos.

Pero basta que un triángulo dé dos rectos como suma de sus ángulos para que la den todos.

Por lo tanto, llegamos á la siguiente conclusión: Si existe un solo *triángulo* en que los ángulos valgan dos rectos, con todos ocurrirá lo propio, las paralelas no euclidianas se confundirán con la de Euclides, y la geometría rigurosa será, por lo tanto, la geometría corriente, y si no sucede esto todos los triángulos darán sumas menores de dos rectos y habrá por un punto *dos* paralelas á una recta, simétricas respecto á la perpendicular desde el punto bajada, con la cual perpendicular formarán un ángulo variable con la posición del punto.

La cuestión queda en el terreno experimental. Pues bien, habiéndose calculado, con la exactitud posible, enormes triángulos en observaciones astronómicas, la diferencia entre dos rectos y la suma de los ángulos no ha llegado nunca a centésimo de segundo. Prácticamente, el postulado de Euclides es cierto.

Hay que renunciar, sin embargo, á demostrarlo en el te-

rreno teórico y riguroso, sobre el cual sólo es legítima la geometría no euclidiana. Ante todo, el postulado no es evidente, como han creído ver muchos filósofos, Schopenhauer entre ellos. Hay, sí, una especie de evidencia, puramente de los *ojos*, cuando se dibujan una perpendicular y una oblicua, y se acentúa la oblicuidad de esta última. *Se ve* que la oblicua prolongada cortará á la perpendicular. Pero aproximad la oblicua á la posición normal, y la evidencia se irá debilitando hasta completa confusión para oblicuidades muy pequeñas.

Demostraciones aparentes se han dado varias, alguna refutada por Gauss en carta interesante, no tan interesante de seguro como la que dirigió á Schumacher sobre el mismo asunto, en la cual elogiaba la obra de Lobatcheffsky.

Entre las demostraciones aparentes citaré dos: la primera se funda en afirmar que la superficie contenida entre los lados de un ángulo es mayor que la contenida entre las rectas que forman una faja del mismo ancho en cualquier punto. Para hacer notar esto, se dice que no se cubre la superficie del plano con un número, por grande que sea, de fajas adosadas, mientras que el plano se cubre repitiendo el ángulo alrededor de un punto como vértice. Una vez admitido esto, se demuestra que una perpendicular y una oblicua se cortan, dado que el ángulo que la oblicua forma con la perpendicular va comiendo superficie á la faja dentro de la cual está trazado, llegando un momento en que, al exceder una superficie de otra, se verifica la intersección.

El sofisma está en la comparación de dos superficies infinitas, como son la de la faja y la del ángulo, comparación que puede dar lugar á resultados tan caprichosos como queramos, gracias á la arbitrariedad de ley en el crecimiento de las extensiones (V. Duhamel). A más de esto, se introduce una concepción del plano, la cual no hay derecho á suponer independiente del postulado de Euclides.

Otra demostración es la dada por Taine (*L'intelligence*, t. II). Se funda en que la distancia de los puntos de la oblicua a la perpendicular puede disminuir cuanto se desee; no es más, en el fondo, que la teoría de la semejanza de figuras; supone implícitamente el postulado y no merece refutación.

especial. Los conocimientos matemáticos de Taine eran ligeros.

No es difícil hacerse cargo *a priori* de la imposibilidad de la demostración buscada. Dice Bertrand (*Calcul des probabilités*) que no dan las fórmulas más que lo que en ellas se pone. Y esta frase puede aplicarse á las definiciones.

Tenemos clara noción, no de lo que es una recta, no de lo que es un ángulo, sí lo que es igualdad y suma de rectas y de ángulos, gracias a la superposición de sus partes. Cuando se trata de una propiedad nueva, debe reducirse á las que se estudian por la superposición, y éste es, en efecto, el método fundamental de toda geometría pura. Para emplearlo, las figuras deben estar completamente definidas y relacionamos segmentos y ángulos por sus propiedades de coincidencia.

Al enunciar la primera cuestión de la teoría de paralelas: ¿cuáles son las rectas que trazadas por un punto no cortan á otra dada?, se ve que debemos buscar la manera de ser imposible la existencia de un punto definido por estar en ciertas rectas.

Esta imposibilidad de existencia está determinada por la posición de las rectas.

Si alteramos sumamente poco esta posición, es claro que aparecerá el punto, puesto que dejarán de reunirse las condiciones para que no exista.

Pero ¿dónde aparecerá? El análisis nos dice que á una distancia del lugar de modificación tan *grande* como se quiera.

Las figuras que por coincidencia nos conduzcan al estudio del fenómeno deben abrazar el campo de modificación y el proceso del punto. Estos dos elementos se encuentran á distancia que aumenta sin límites cuando el fenómeno tiende á verificarse; luego los métodos generales de investigación son inaplicables.

Tenemos que recurrir á la definición de recta: línea determinada por dos puntos. Es evidente que esta definición, que sirve muy bien, *en la porción finita de plano donde se dibuja* para establecer las leyes de la coincidencia de figuras formadas por rectas, puesto que dos rectas que tengan dos puntos comunes coincidirán en toda su extensión, nada nos dice respec-

to á las propiedades de los puntos cuando nos alejamos ilimitadamente á lo largo de la recta en parajes que precisamente necesitamos estudiar ahora; es más, como en la misma idea de *alejarse* ilimitadamente que acabo de emplear entra la noción de recta, nada nos indica que la *distancia* entre dos puntos no tenga un límite superior. De este modo construiríamos con Riemann una tercera geometría, que se reduciría á la no euclidiana para el valor *infinito* de ese límite de distancias.

RAFAEL BARRETT