CONFERENCIAS

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS

EL CONCEPTO DEL INFINITO

El concepto del infinito presenta un caso característico de la infecundidad inherente a la falta de precisión. Se verá —así lo espero— cómo el concepto del infinito no sirvió durante largas épocas más que para llenar libros de huera metafísica, y cómo al penetrar en las matemáticas y al adquirir contornos definidos, se hizo fecundo, y llevó al hombre a las más altas cimas de la ciencia.

Era evidente que los griegos habían de cultivar la geometría, matemática de la forma, y que ignoraban el análisis…Torcieron la rigidez del *infinito* y lo desvanecieron en lo *indefinido...*

Esta confusión entre lo infinito y lo indefinido, unida al error de querer aplicar a los objetos sensibles relaciones validas solamente en el terreno de la idea pura, condujo a contradicciones curiosas, cuyo más interesante ejemplo es quizá el célebre sofisma atribuido a Zenón de Elea.

Según Zenón, es absolutamente imposible que una liebre alcance a una tortuga.

Parten la tortuga y la libre. Por despacio que camine la tortuga, por veloz que corra la liebre, es claro que cuando la liebre haya llegado al punto donde estaba la tortuga, ésta se habrá transportado más allá. Cuando la liebre toque este nuevo punto, la tortuga se habrá transportado más allá -por poco que sea- y no será alcanzada. Podemos repetir el razonamiento hasta el infinito (indefinidamente); jamás se anulará el espacio que queda entre la liebre y la tortuga; jamás la tortuga será alcanzada por la liebre.

Ahondemos el sofisma, presentándolo en un aspecto más general. Supongamos que no se trata de que la liebre alcance a la tortuga, sino de que consiga llegar al punto A (fig. 1).

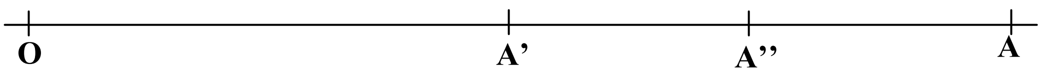

Figura 1

Es evidente que para que la liebre arribe a A es necesario que pase primero por A', punto medio de la distancia que la separa de A. Pero una vez en A' la misma dificultad se presenta: es preciso que llegue a A", punto medio de A' A. Podemos repetir este razonamiento hasta el infinito (indefinidamente); por cerca que la liebre esté, siempre existirá un punto medio que no habrá tocado aún; luego, jamás alcanzará el punto A que está del otro lado de ese inaccesible punto medio.

Descubrimos que lo que se niega aquí es la posibilidad de movimiento. La velocidad de la liebre no interviene para nada en el sofisma de Zenón. Cualquiera que fuese esa velocidad, se le niega a la liebre la posibilidad de moverse.

Indicaré que es irrebatible el sofisma, mientras no se esté de acuerdo en un cierto número de convenciones que den precisión a los conceptos de continuidad y de limite, inseparables del concepto del infinito. Pero tales convenciones, que son precisamente el objeto de esta lección, no se habían enunciado en tiempos de Zenón de Elea, y el concepto de infinito era algo vago y enigmático en la mente de los filósofos, como todavía lo es hoy en la mente del vulgo.

Los matemáticos griegos de la última época tuvieron, sin embarco, ideas precisas acerca del infinito... La mejor prueba de que el concepto de límite no era del todo desconocido de los antiguos, es la famosa cuadratura de la parábola, debida a Arquímedes, problema tan elegante y sencillamente resuelto que no quiero privarme de recordarlo. Su importancia histórica es considerable; la cuadratura de la parábola representa en el fondo la primera aparición del análisis infinitesimal.

El infinito es perfectamente concebible, equivale a un conjunto de relaciones tan manejables como las otras, y se ha logrado en la mayor parte de los casos una precisión suficiente a cambiar las corrientes de la filosofía vulgar, si lo filósofos se dignasen estudiar matemáticas.

E1 infinito se presenta desde las primeras líneas de un texto de aritmética elemental. El concepto de número entero encierra en si la existencia de otro número entero y éste la existencia de otro distinto de los dos anteriores. Nada nos impide repetir esta construcción cuantas veces queramos, porque obtener un número tal que nos impida construir inmediatamente otro nuevo y diferente de los ya obtenidos, es algo esencialmente contrario a la razón: es algo imposible.

Ese conjunto creciente de números enteros no entra confusamente en nuestro entendimiento, no queda informe y caótico en el seno de la inteligencia; Por una operación necesaria el conjunto se ordena, adquiere una forma definida; cada número entero se coloca en un lugar fijo y todos se conciben en serie, como las divisiones del tiempo. La representan de esta serie es una recta horizontal (fig. 2), en que un sistema de puntos 1, 2, 3, 4..., situados a intervalos iguales representan el sistema de los enteros obtenidos.

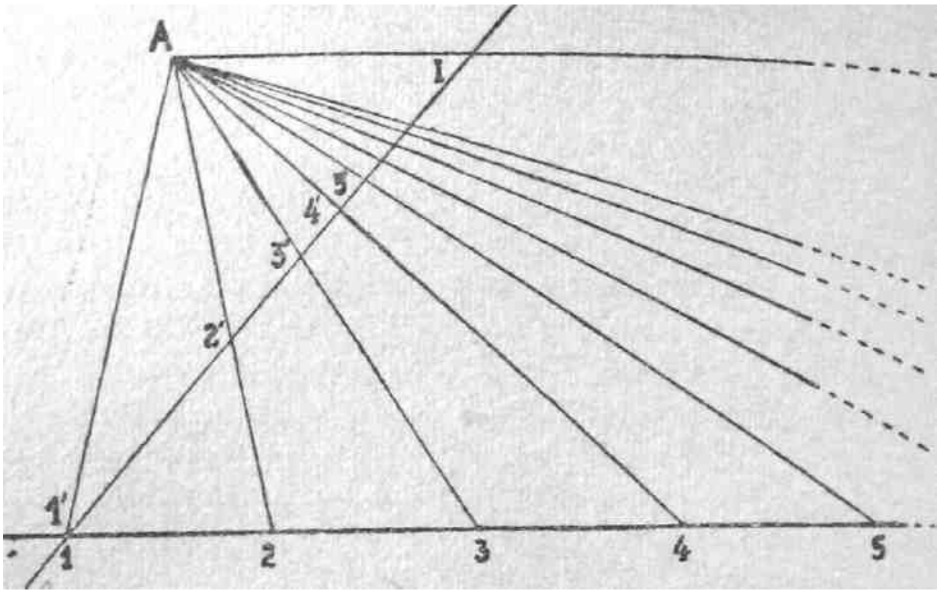

Figura 2

¿Qué nos impide, por lejos que esté del extremo 1 el último punto construido, construir uno más? Nada. El conjunto de números enteros es infinito. Tal como lo hemos representado, está limitado a la izquierda por el punto 1. A la derecha es absurdo representar su limitación. Pero esa limitación imposible de representar, ¿existe en la idea pura? Sí. Es lo que se llama *punto del infinito* sobre la recta l.

Tracemos por 1 una recta I, y tomemos un punto A del plano. Unamos A con 1, 2, 3, 4, etc. Tendremos sobre 1 I los puntos 1', 2', 3',…, que se corresponden uno a uno con los 1, 2, 3... Infinito será el 1', 2', 3'.... Por distante que esté un punto sobre la horizontal dibujada, lo podremos unir con A por una recta distinta de las anteriores.

Examinemos el conjunto 1', 2', 3',… derivado del junto primitivo. Está limitado por el punto I, que pertenece a la paralela tirada desde A. Es evidente, en efecto, que todas las rectas trazadas por A quedan por debajo de la paralela.

He aquí, pues, que un conjunto infinito que no estaba limitado más que de un lado, se ha transformado por medio de una construcción clara y precisa, merced a la cual los elementos de un conjunto se corresponden uno a uno con los del otro. El elemento que corresponde al límite I es el *punto del infinito.* No seremos capaces de representarlo, pero somos capaces de representar la recta que lo une con A, somos capaces de hallar su derivado I. Somos capaces, en una palabra, de incluirlo en relaciones definidas y semejantes a los demás; esto nos basta.

Ahora comprendemos el sentido de la frase: "Una recta corta a su paralela en el infinito". Expresa una relación precisa. No equivale de ningún modo a decir que no se cortan.

Dos semirrectas divergentes no se cortan. Sería un dislate decir que se cortan en el infinito.

Dos circunferencias exteriores no se cortan. Sería un solemne dislate decir que se cortan en el infinito.

El infinito es, pues, una de las fronteras de un conjunto de puntos. Unas veces se puede representar y otras no. Hasta hay casos en que no existe. Los siguientes ejemplos aclaran la idea.

Volvamos a los números enteros, que forman un conjunto infinito, y representémoslo de otro modo.

Supongamos que en vez de tomar intervalos iguales sobre una recta los tomamos sobre una circunferencia O (fig. 3), empezando por el punto 1. Iremos construyendo el 2, después el 3, después el 4, y dando vueltas y vueltas a la circunferencia hasta el infinito. Una de las fronteras del conjunto está en el punto 1, ¿pero dónde esta la otra? No solo no podemos representarla, sino que tampoco podemos transformar el conjunto en otro cuya frontera corresponda con esta que queremos concebir. Sea el punto A. Cuando los números enteros estaban representados sobre una recta, dibujábamos la que une a A con el infinito, ¿pero cuál es ahora la recta que une a A con el infinito sobre la circunferencia O? Ninguna. Aquí verdaderamente el infinito no da lugar a relaciones precisas, es decir, aquí el infinito no existe.

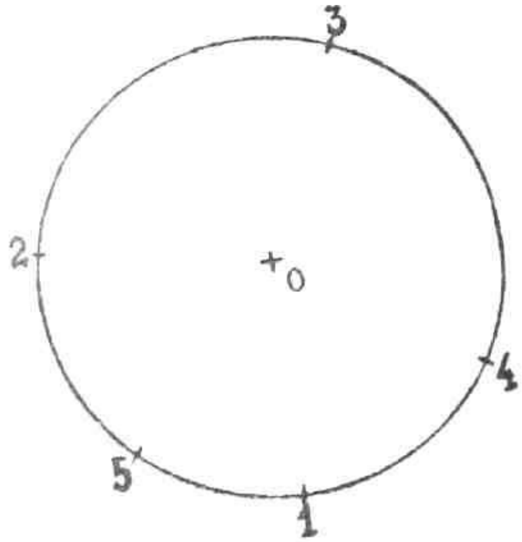

Figura 3

Supongamos ahora que representamos los números enteros sobre una espiral hiperbólica, lo que responderá a una cierta manera de concebirlos (fig. 4).

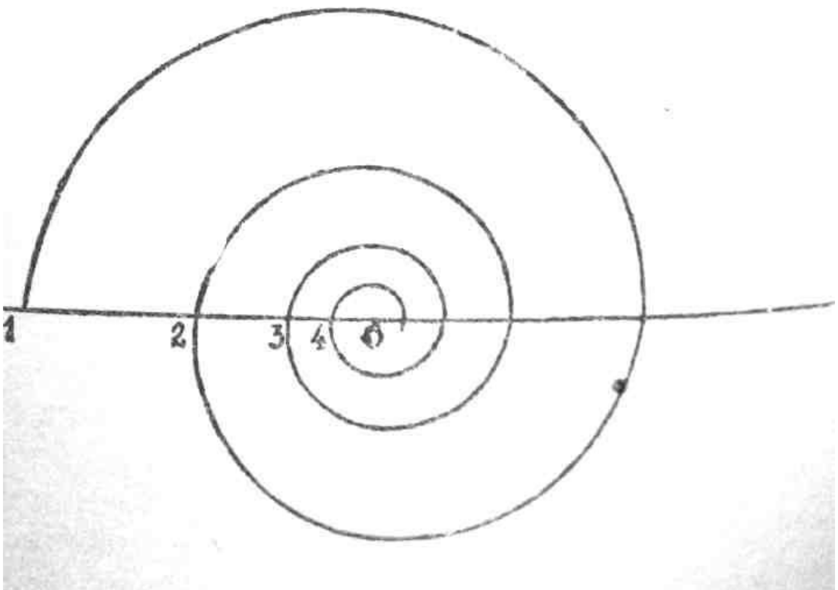

Figura 4

En la espiral hiperbólica, las distancias de los puntos al origen O son inversas del número de vueltas que dan alrededor de él. Es decir que, por ejemplo, a la primera vuelta la distancia se ha reducido a la mitad; a la segunda se ha reducido a la cuarta parte, y así hasta el infinito. Nuestro conjunto tendrá como siempre el punto 1 por frontera. La otra frontera será evidentemente el punto O al cual nos acercamos cuanto queramos, aumentando el número de vueltas. Jamás lo alcanzaremos rodando por la espiral en torno de él, pero sabemos cuál es y dónde está. Aquí el infinito se presenta con la misma facilidad que un punto cualquiera. Existe a la vez en la razón y en la representación.

El conjunto que hemos estudiado, el de los números enteros, es el más sencillo de todos. Otro conjunto tal que nos sea posible hacerlo corresponder elemento a elemento con el de los números enteros se llama *numerable.* Así el conjunto de números pares es numerable, porque lo podemos hacer corresponder elemento con elemento con el de los números enteros.

El conjunto de números primos es igualmente numerable. Si añadimos a un conjunto numerable un número cualquiera de elementos, resulta un conjunto también numerable.

Hasta ahora nos hemos propuesto el conjunto, y hemos investigado sus fronteras. Hagamos lo inverso: démonos las fronteras y construyamos el conjunto.

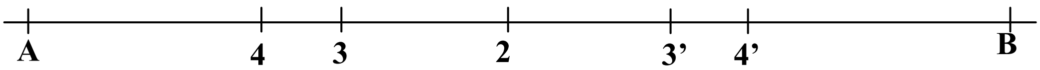

Figura 5

Sean A y B las fronteras (fig. 5). En seguida vemos que nos es dado construir entre A y B una infinidad de puntos. Pero guardémonos de construirlos al azar; conservémonos siempre dentro de la precisión; es necesario tomar esos puntos según una ley definida.

Escojamos punto 2 que divide a AB en dos partes iguales; luego 3, 3’ que la divide en tres partes iguales, luego los 4, 2, 4', que la divide en cuatro, y así hasta el infinito. Habremos obtenido un conjunto que se acercará cuanto queramos a los límites A y B, y ése conjunto *infinito* lo conocéis todos; si B representa el elemento 1 es el conjunto de los números fraccionarios.

Se demuestra fácilmente, y no lo hago por no fatigar que el conjunto fraccionario es numerable.

¿Queremos derivar de él un conjunto cuya frontera no sea representable? Tracemos AM, elijamos un punto c tal que cB sea paralela a AM, y dibujemos cA, c2, etcétera. Resultará el nuevo conjunto A, 2_1, 3_1, $3'_1$. Una de sus fronteras será A. La otra, la que corresponde a B se habrá ido, como vulgarmente se dice, *al infinito.* Pero la concebimos con la misma precisión.

Al marcar entre A y B los puntos del conjunto fraccionario, ¿habremos agotado todos los puntos del segmento? No. La razón concibe, además de los infinitos números fraccionarios, los infinitos números inconmensurables, es decir, los números que no se pueden formar sumando partes iguales de la unidad, por chicas que sean. ¿Qué es un número inconmensurable? ¿Cómo concebirlo de un modo definido?

La escuela de Berlín ha fijado este concepto, y a Kronecker se debe su mejor enunciado, que expresaré en el lenguaje de esta lección: "Un número inconmensurable es la frontera de un conjunto de números fraccionarios". A cada número inconmensurable corresponde, pues, un conjunto infinito de fraccionarios, construido con arreglo a una ley precisa.

La frontera de ese conjunto es el número inconmensurable.

Sin el concepto de frontera de un conjunto, sin el concepto de infinito, no sería posible concebir los números inconmensurables.

El conjunto de inconmensurables no es numerable. No es posible hacerlo corresponder elemento a elemento con el conjunto de números enteros. Es *más* infinito o según el idioma matemático, es un conjunto de *mayor potencia*

En cambio se ha descubierto que es posible hacer corresponder uno a uno los puntos de una línea con los puntos de un plano, de un volumen, de un espacio de *n* dimensiones. La potencia común de todos esos conjuntos se llama potencia de lo *continuo.* Peano ha sido el primero que ha construido una curva que pasa por todos los puntos del área de un cuadrado.

La razón humana ha ido más allá, y ha concebido conjuntos infinitos de mayor potencia que el conjunto de los puntos del espacio mismo; me es imposible tratar de ellos en una lección elemental.

Fijémonos en este hecho capital: Existen dos clases de conjuntos; en la una las fronteras son elementos que pertenecen al conjunto, que se construyen según la misma ley que los elementos del conjunto; en la otra las fronteras son elementos extraños al conjunto; no se construyen según la ley. Existen por el hecho de existir el conjunto dado, y se definen sencillamente por eso. Así se han definido los números inconmensurables por ser fronteras de ciertos conjuntos de números fraccionarios.

Pondré un caso cualquiera. Sea la fracción decimal periódica 0,9999...

He aquí un conjunto infinito de fracciones decimales. Una de las fronteras del conjunto es 0,9. La otra es la unidad, a la que nos podremos acercar cuanto queramos sin tocarla nunca. Pero la unidad es decimal, vale diez decimos. *Las fronteras pertenecen al conjunto.*

Sea la fracción periódica 0,3333...

He aquí otro conjunto infinito de fracciones decimales. Una de las fronteras es tres décimas. La otra es 1/3, que nos podemos acercar cuanto queramos, sin tocarlo nunca.

Pero 1/3 no es una fracción decimal. *La frontera no pertenece al conjunto.*

Tocamos la prodigiosa fecundidad del concepto de conjuntos, de fronteras, de infinitos. Todas las veces que os sea dado construir un conjunto cuya frontera no pertenezca a él, habremos construido una concepción nueva, habremos creado una forma más de nuestra razón, una forma viva y susceptible de engendrar otras; ¿qué es indispensable para esto? Que el conjunto sea infinito, porque las fronteras de un conjunto finito pertenecen a él y no nos dicen nada nuevo.

Estos conjuntos, de fronteras por decirlo así *exteriores* a ellos, han dado lugar a uno de los conceptos más abstractos de las matemáticas, el *transfinito,* que corresponde a una frontera situada entre el conjunto y la frontera extraña, y es elemento de la misma clase que los elementos del conjunto. Así la serie de los números enteros tendrá dos límites, uno externo, el *infinito,* y otro interno el *transfinito,* que será un entero mayor que todos los números enteros. El transfinito es siempre imposible de representar. Nació en un teorema del gran Paul Dubois Reymond, y no fué desarrollado hasta mucho después por el ilustre Cantor, profesor de la Universidad de Munich. Desgraciadamente no cabe en esta rápida lección recorrer tan hermosas teorías, y concluyo procurando mostrar el poder del concepto del infinito como instrumento de investigación.

Un teorema único domina el análisis infinitesimal. Es éste: "Si dos conjuntos se corresponden elemento a elemento, también se corresponden sus fronteras".

Con él por única palanca se cimenta el cálculo diferencial que trata de las relaciones entre los infinitamente pequeños y el cálculo integral que trata de sus sumas.

¿Qué son los infinitamente pequeños? Conjuntos que tienen por frontera el cero.

El cero no pertenece al conjunto. Por chico que sea un número, jamás se parecerá a la nada. La frontera es, pues, aquí, externa, y debemos esperar de estos conjuntos resultados nuevos...

En el método creado por Newton y Leibnitz se estudian relaciones definidas, entre elementos de conjuntos infinitamente pequeños, y esas relaciones se aplican después a las fronteras correspondientes, fronteras externas, seres intelectuales nuevos que quedan unidos por nuevos lazos, y que jamás habrían salido de la nada sin el concepto del infinito.

Concebimos las figuras *continuas,* es decir, creciendo por grados infinitamente pequeños, conjuntos de frontera cero. También hemos vaciado la representación de la Naturaleza en el molde de la continuidad, y para nuestra razón el movimiento, la fuerza, la masa, son entidades continuas. Pero la continuidad supone forzosamente el concepto del infinito. He aquí por qué el mismo instrumento de cálculo que revolucionó la geometría fundó la mecánica, la astronomía y la física. He aquí, como el concepto del infinito es hoy uno de los más preciosos y fecundos de la ciencia, uno de los más vivos y de los más susceptibles de desdoblamientos y prolongaciones.

Cuando publicó Cantor sus ruidosos teoremas sobre el transfinito, surgió otra vez la vieja antinomia de Kant, y se entabló en la *Revue Philosophique* de Ribot una polémica acerca de la legitimidad de los conceptos *irrepresentables.* Se vio por fin a los matemáticos enseñar los dientes a los filósofos. Poincaré, Borel, los primeros analistas de Francia, defendieron el transfinito y el transfinito quedó triunfante. En aquella memorable ocasión, a la pregunta de si el Universo es infinito, transfinito o finito, se contestó por el maestro francés: "jamás lo sabremos y quizá no tenga sentido esta pregunta. En todo caso concebiremos el universo como nos sea más cómodo para hacer progresar la ciencia".

El universo es muy grande. Para medir las distancias estelares necesitamos el compás de la luz, que anda 300.000 kilómetros por segundo. Esa grandeza no tiene nada de común con lo infinitamente grande.

El Universo es muy chico. En una gota viven millones de micro-organismos provistos de órganos y de nervios; las radiaciones físicas exigen moléculas y movimientos expresables en billonésimos de milímetros. Esa pequeñez no tiene nada de común con lo infinitamente pequeño.

Aunque descubramos una nebulosa tan enormemente lejana que la luz tarde en llegarnos de ella un numero de siglos representados por la unidad seguida de cien ceros, el Universo no será infinito ni transfinito. Para ello sería preciso que detrás de esa distancia existiese forzosamente otra mayor, pero esa necesidad es una relación y las relaciones no están más que en nuestra mente.

Por mucho tiempo que pasemos sin obtener una distancia mayor que la más grande de las que hayamos obtenido, no tendremos derecho a afirmar que el Universo es finito. Para ello sería, preciso que detrás de esa distancia no pudiera haber otra mayor, pero esa imposibilidad es una *relación,* y las relaciones no están más que en nuestra mente.

Lo mismo pasa con la divisibilidad de la materia, de la energía, con lo infinito o infinitamente pequeño. Esas palabras expresan realidades, sí, pero realidades de la razón y sólo de la razón.

Los que hayan asistido a la lección que di sobre el concepto del espacio, unirán aquellas conclusiones con éstas, y advertirán en todas una tendencia misma: la de devolver a la razón lo que es exclusivamente suyo, la de colocarla, no debajo del Universo, sino enfrente... Mañana estará encima.

Oímos constantemente que el progreso moderno se debe a la experiencia y a la experimentación. Al pie de la letra es esto una falsedad y una injusticia. El conjunto de los hechos observados, sin la razón que los ordena, que los hace suyos para conquistar lo desconocido, sin la razón que los cuaja en leyes que la guían en la sombra hacia otros hechos y otras verdades, sería una masa caótica, estéril, como la nada.

No son los hechos los que engendran la ley: somos nosotros los que, ante esos hechos, buscamos y encontramos en el arsenal admirable de nuestra inteligencia la ley que mejor se adapta a ellos y la aprisiona en una sola y armoniosa hipótesis. No es la realidad física la que gobierna nuestra razón, sino nuestra razón la que organiza la realidad física y la gobierna. No hemos nacido para esclavos, sino para dueños.

Hacía miles de años que la razón suspiraba y callaba bajo el dogma, bajo la revelación absurda, bajo un política que no dejaba pensar. Hoy está a salvo pero no se convence todavía de ello. Se apodera tímidamente de las energías naturales, y se cree, a pesar de todas sus victorias, supeditada a la realidad física, como lo ha estado a las viejas leyendas. No. Es necesario que se sienta libre y soberana.

Hemos visto que es libre de concebir el espacio de un modo o de otro. Hemos visto que es libre de concebir el Universo de un modo o de otro; que introdujo libremente en la realidad el concepto de infinito, y que libremente introducirá tal vez el concepto de transfinito o de infinito de potencias superiores. Todo lo puede esperar de ella la razón misma.

Somos débiles, sí. Sufrimos. Nuestra vida es un confuso aleteo que se desvanece. Pasamos como pasa un grano de polvo por un rayo de sol. Pero recibimos y guardamos durante ese rápido instante, para transmitirlo a la eternidad futura, un divino germen: la razón. Ella marcha ¿qué importa lo demás?